Práctica 2

Sección: Postulados de la mecánica cuántica

1. Calcular los autovalores de los operadores X, Z, H y $CNOT$, y dar un autovector para cada uno.

2. De acuerdo al Teorema 3.8, y siguiendo el Ejemplo 3.7, el conjunto $\{\beta|1\rangle - \beta i|0\rangle \mid \beta \in \mathbb{C}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$. Mostrar que esta afirmación es cierta.

3. Dar un ejemplo de una medición que no sea proyectiva en el espacio de estados de un qubit. Dar los resultados posibles de la medición sobre el estado $|0\rangle$.

4. Con los observables X y H, realizar una medición sobre los siguientes estados:

   a) $|0\rangle$ *b*) $-|1\rangle$ *c*) $1/\sqrt{2}|0\rangle + 1/\sqrt{2}|1\rangle$

5. Dar el conjunto de valores de θ para los cuales los siguientes pares de estados son iguales:

   a) $1/2|0\rangle - \sqrt{3}/2|1\rangle$ y $e^{i\theta}(1/2|0\rangle - \sqrt{3}/2|1\rangle)$.
   b) $|0\rangle$ y $e^{i\theta}|+\rangle$
   c) $|1\rangle$ y $1/\sqrt{2}(|+\rangle + e^{i\theta}|-\rangle)$
   d) $|1\rangle$ y $e^{i\theta}|0\rangle$

Sección: Operador densidad

6. Completar la prueba de las propiedades de la traza de una matriz.

7. Probar el Corolario 3.14.

8. Calcular la traza de las siguientes matrices:

   a) $|+\rangle(e^{i\pi}\langle 0|)$
   b) $(1/2|0\rangle - \sqrt{3}/2|1\rangle)(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|)$.
   c) $1/\sqrt{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$.

9. Dar la matriz densidad de los siguientes conjuntos de estados.

   a) $\{(\frac{1}{3}, |+\rangle); (\frac{1}{2}, i|0\rangle); (\frac{1}{6}, \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle)\}$
   b) $\{(\frac{1}{2}, |0\rangle); (\frac{1}{2}, \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\}$
   c) $\{(\frac{1}{4}, \beta_{00}); (\frac{1}{4}, \beta_{01}); (\frac{1}{4}, \beta_{10}); (\frac{1}{4}, \beta_{11})\}$

10. Probar el Teorema 3.21.

11. Supongamos que no sabemos en cuál de los conjuntos de estados puros $9a$ y $9b$ (del ejercicio 9) se encuentra un sistema, y decidimos que el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cada uno de ellos. ¿Cuál es la matriz densidad de esta configuración?

12. Probar que para todo operador A, $A^\dagger A$ es positivo.

13. Para cada una de las siguientes matrices

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

    a) Probar que es positiva y su traza es 1.
    b) Dar un conjunto de estados puros para el cual sea su matriz densidad.

14. Sea un sistema cuántico descripto por el conjunto de estados puros $\{(1/4, |0\rangle); (3/4, |+\rangle)\}$ y otro sistema cuántico descripto por el conjunto $\{(3/4, |1\rangle); (1/4, |-\rangle)\}$.

    a) Dar la matriz densidad del sistema completo compuesto por ambos sistemas.
    b) Utilizando el la medición $\{|00\rangle\langle 00|, |11\rangle\langle 11|, |01\rangle\langle 01|, |10\rangle\langle 10|\}$, dar los posibles resultados de la medición con sus probabilidades y el estado final del sistema en cada caso.

15. Para cada uno de los estados de Bell, dar el operador densidad reducido para cada qubit.

16. Utilizar la traza parcial para determinar cuales de los siguientes estados están enredados.

    a) $1/\sqrt{2}(|0+\rangle + |1-\rangle)$
    b) $1/\sqrt{2}(|++\rangle + |--\rangle)$
    c) $1/\sqrt{3}(|++\rangle + |+-\rangle + |--\rangle)$