Práctica 1

1. Determinar si la el espacio vectorial y la operación dada en cada caso define un espacio pre-Hilbert.

   a) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ de matrices cuadradas de dimensión 2×2 sobre $\mathbb{R}$, la función $f(M,N) = \left|\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij} \times n_{ij}\right|$, donde $M = (m_{ij})_{ij}$ y $N = (n_{ij})_{ij}$.

   b) Ídem anterior, pero considerando el espacio vectorial de matrices cuadradas de dimensión 2×2 sobre $\mathbb{C}$.

   c) En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$, la función $f(\vec{v},\vec{w}) = v_1^* \cdot w_2 + v_2^* \cdot w_1$.

2. Determinar el producto tensorial entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. ¿Qué sucede si queremos calcular el producto tensorial entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}^2$? ¿Es posible hacerlo? Explicar.

3. Calcular los siguientes productos tensoriales.

   a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

4. Escribir los siguientes vectores usando notación Dirac en la base canónica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

   a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & i\end{pmatrix}$

5. Reescribir las matrices resultados del ejercicio 3 en notación Dirac.

6. Usando notación Dirac y resultados de ejercicios anteriores, calcular rapidamente $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

7. Mostrar que $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ es base ortonormal del espacio $\mathbb{C}^4$. ¿De cuántos qubits se trata?

8. Probar las propiedades de los operadores adjuntos listadas justo debajo de la Definición 1.17.

9. Mostrar que si un operador es hermítico, su diagonal es real.

10. Considerar el operador de medición $\{|+\rangle\langle+|, |-\rangle\langle-|\}$, con $|+\rangle = {}^1\!/\!\sqrt{2}|0\rangle + {}^1\!/\!\sqrt{2}|1\rangle$ y $|-\rangle = {}^1\!/\!\sqrt{2}|0\rangle - {}^1\!/\!\sqrt{2}|1\rangle$. Determinar los resultados posibles (y sus probabilidades) de medir con ese operador cada uno de los siguientes qubits:

    a) ${}^1\!/\!3|0\rangle + {}^{\sqrt{8}}\!/\!3|1\rangle$

    b) ${}^1\!/\!\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$

    c) $|-\rangle$

11. Para cada par de estado y base de medición, dar los posibles resultados y sus probabilidades.

a) $\sqrt{3}/2|0\rangle - 1/2|1\rangle$, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
b) $\sqrt{3}/2|1\rangle - 1/2|0\rangle$, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
c) $-i|0\rangle$, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
d) $-|1\rangle$, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
e) $|0\rangle$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$
f) $|+\rangle$, $\{1/2|0\rangle + \sqrt{3}/2|1\rangle, \sqrt{3}/2|0\rangle - 1/2|1\rangle\}$

12. ¿Cuáles de los siguientes estados están en superposición con respecto a la base canónica? Para los estados que estén en superposición, dar una base para la cual no lo estén.

    a) $|0\rangle$
    b) $|+\rangle$
    c) $1/\sqrt{2}(|+\rangle + |-\rangle)$
    d) $1/\sqrt{2}(|+\rangle - |-\rangle)$
    e) $\sqrt{3}/2|+\rangle - 1/2|-\rangle$
    f) $1/\sqrt{2}|0\rangle - 1/\sqrt{2}|1\rangle$

13. ¿Cuáles de los estados del ejercicio anterior están en superposición con respecto a la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y cuáles no?
14. Mostrar que las compuertas cuánticas H, I, X, Z, iXZ y $CNOT$ están bien definidas (i.e. mostrar que efectivamente son compuertas cuánticas).
15. Usando sólo compuertas vistas en la Definición 1.26, construir una máquina de clonado que clone los qubits $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (no importa lo que haga con otros qubits, por lo tanto, dicha máquina no será universal).
16. Usando sólo compuertas vistas en la Definición 1.26, construir una máquina de clonado que clone los qubits $|+\rangle$ y $|-\rangle$.
17. Dar un circuito que genere el estado $1/\sqrt{2}|000\rangle + 1/\sqrt{2}|111\rangle$ con la entrada $|000\rangle$.
18. ¿Cuáles son los resultados posibles al medir $1/\sqrt{2}|000\rangle + 1/\sqrt{2}|111\rangle$ en la base canónica?
19. ¿Cuáles son los resultados posibles al medir $\alpha|000\rangle + \alpha|001\rangle + \alpha|100\rangle$?
    Determinar α.
20. Usar el algoritmo de teleportación dos veces para teleportar el 2-qubit β_{00} (teleportar primero el primer qubit y luego el segundo qubit).
21. En base al ejercicio anterior, ¿cómo generalizaría el algoritmo de teleportación a n-qubits?
22. Mostrar que U_f es una compuerta cuántica para cualquier f dada.
23. Escribir la traza del algoritmo de Deutsch para la función identidad.
24. Escribir la traza del algoritmo de Deutsch-Jotza para la función $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, donde $\oplus$ es la suma modulo 2.
25. En una lista de un millón de elementos distintos

    a) ¿Cuál es el número óptimo de iteraciones del algoritmo de Grover para buscar un elemnto?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de error con el número óptimo de iteraciones?
    c) ¿Cuántos pasos serían necesarios, en promedio, en el caso clásico?

26. En el protocolo BB84, ¿cuántos bits necesitan comparar Alice y Bob para tener 90 % de chances de detectar la prescencia de Eve?